# CONCOURS ATS
# -SESSION 2022-

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**CALCULATRICE INTERDITE**

# CODE ÉPREUVE : 956

**DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H**

# Exercice 1

On note $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $3 \times 3$ à coefficients réels. On considère les éléments suivants de $E$ :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

***Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.***

## Partie A – Réduction

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice $A$.
2. Justifier que $A$ possède une unique valeur propre et donner son ordre de multiplicité.
3. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

On considère dans la suite de cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= e_1 - e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

4. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ de l'endomorphisme $f$ dans la base $\mathscr{B}$.
5. Calculer le rang de la matrice $A$. L'endomorphisme $f$ est-il surjectif ?
6. L'endomorphisme $f$ est-il injectif ? Est-il bijectif ?
7. On pose $e'_1 = (1, 0, -1)$ et $e'_2 = (1, -1, 1)$. Montrer que la famille $(e'_1, e'_2)$ forme une base de l'espace vectoriel $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.
8. (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$.

## Partie B – Étude d'une suite de matrices

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que la matrice $A$ est inversible et que $A^{-1} = 2I - A$.
3. Soient $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ des nombres réels vérifiant $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$. Montrer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ par la condition initiale $X_0 = A$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel $n$, il existe un unique couple $(\alpha_n, \beta_n)$ de réels tel que

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$

et que ce couple vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} = \dfrac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$

5. Déterminer $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$ et $\beta_3$.
6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de $\alpha_n$ et $\beta_n$, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, puis montrer cette conjecture. En déduire l'expression de $X_n$ en fonction de $n$.

## Exercice 2

On considère la fonction $2\pi$-périodique $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [-\pi\,,\pi[, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi\,,0] \\ x & \text{si } x \in [0\,,\pi[ \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction $f$ sur l'intervalle $[-3\pi\,,3\pi[$.

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

la série de Fourier de la fonction $f$.

2. (a) Calculer le coefficient $a_0$.
   (b) Calculer les coefficients $a_n$, pour tout entier naturel non nul $n$.
   (c) Calculer les coefficients $b_n$, pour tout entier naturel non nul $n$.
   (d) Montrer que la série de Fourier de $f$ est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.
3. En évaluant la série de Fourier de $f$ en un point particulier, montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
5. (a) Énoncer le théorème de Parseval.
   (b) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

## Exercice 3

On rappelle que la fonction tangente, notée tan, réalise une bijection strictement croissante de $]-\pi/2\,,\pi/2[$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque, notée arctan, est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-\pi/2\,,\pi/2[$. Elle est de plus impaire, dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

***Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante. La première question de la partie C nécessite le résultat de la question 2 de la partie B. Les questions 2 à 8 de la partie C peuvent être traitées de manière indépendante des parties A et B.***

## Partie A – Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \tag{E}$$

d'inconnue une fonction réelle $y$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. On note (H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \tag{H}$$

1. Déteminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène (H) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer une fonction $\lambda$ dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{x}$ soit solution particulière de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

## Partie B – Étude d'une fonction

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

1. (a) Donner le développement limité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   (b) En déduire le développement limité de arctan au voisinage de 0 à l'ordre 3, puis celui de la fonction $f$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
2. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0. Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.

Dans la suite on continuera à noter $f$ la fonction ainsi prolongée de sorte que $f$ est désormais définie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction $f$ est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$ et la position du graphe de la fonction $f$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
4. Étudier les variations de la fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $p(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner le signe de $p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Démontrer que pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = \dfrac{p(x)}{x^2(1+x^2)}$ puis prouver que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$. On y fera apparaitre ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

## Partie C – Calcul approché d'une intégrale

Dans cette partie on étudie l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

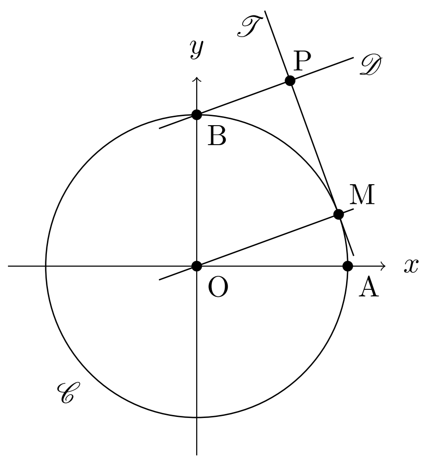
dont on cherche à donner une approximation. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on définit

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

1. Pourquoi l'intégrale $I$ est-elle bien définie ? *Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2 de la partie B.*
2. Établir pour tout réel $x \in [0,1]$ la majoration
$$|r_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$
3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $t$ de $[0,1]$, on a
$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{2n-2} = \frac{1-(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}.$$
En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x$ de $[0,1]$ l'égalité suivante :
$$x s_n'(x) = \arctan(x) - r_n(x).$$
4. Écrire le nombre $s_n(1) - I$ à l'aide d'une intégrale puis montrer que
$$|s_n(1) - I| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{r_n(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n(1)$.
5. Déterminer un entier naturel $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $s_N(1)$ soit une valeur approchée de $I$ à $10^{-4}$ près.
6. Écrire une fonction nommée `s`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul $n$ et renvoie le nombre $s_n(1)$.
7. Écrire une fonction nommée `trouve_N`, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel strictement positif $\varepsilon$ et renvoie le plus petit entier $N$ tel que $\dfrac{1}{(2N+1)^2} \leqslant \varepsilon$.
8. En utilisant les fonctions `s` et `trouve_N`, écrire en *Scilab* ou bien en pseudo-code les instructions calculant et affichant une valeur approchée de l'intégrale $I$ à $10^{-10}$ près.

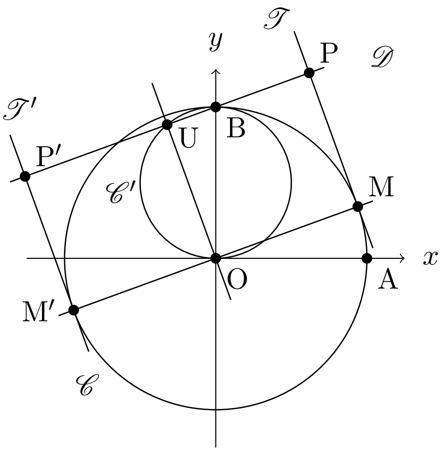
## Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Les points A$(1,0)$ et B$(0,1)$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$. Soit $\theta$ un réel appartenant à $[0\,,2\pi[$. On considère le point M$(\cos\theta, \sin\theta)$ de $\mathscr{C}$.



1. Donner une équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ en M au cercle $\mathscr{C}$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par B et parallèle à (OM).
3. Déterminer, en fonction du paramètre réel $\theta$, tous les couples de réels $(x, y)$ qui vérifient le système
$$\begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = 1 \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = \cos\theta \end{cases}$$
4. En déduire les coordonnées du point P, intersection de la droite $\mathscr{T}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

On appelle $\mathscr{K}$ la courbe décrite par le point P lorsque $\theta$ parcourt $[0\,,2\pi[$. Sur cette même figure, on ajoute le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [OB], le point M′, autre intersection de la droite (OM) et du cercle $\mathscr{C}$, et la tangente $\mathscr{T}'$ au cercle $\mathscr{C}$ en M′. La droite (BP) coupe la tangente $\mathscr{T}'$ en P′ et le cercle $\mathscr{C}'$ en U (voir la figure ci-dessous).




5. Montrer que les droites $\mathscr{T}$, (OU) et $\mathscr{T}'$ sont parallèles.
6. Montrer que $\mathrm{UP} = \mathrm{UP}' = 1$.
7. Montrer le point P′ appartient à la courbe $\mathscr{K}$. Si $\theta$ est le paramètre associé à P, quel est le paramètre correspondant pour P′ ?
8. Déduire de ce qui précède une nouvelle construction des points de la courbe $\mathscr{K}$ n'utilisant que le cercle $\mathscr{C}'$ et le point B.